KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów szkół podstawowych w roku szkolnym 2013/2014

I stopień zawodów (szkolny)
15 października 2013

Propozycja punktowania rozwiązań zadań

Uwaga:
Za każde poprawne rozwiązanie inne niż przewidziane w propozycji punktowania rozwiązań zadań przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1. (0 – 4 pkt)

Suma dwóch liczb jest równa $600\frac{3}{4}$. Jeżeli jeden ze składników podzielimy przez dwa, to nowa suma będzie równa 488,5. Oblicz, jakie to liczby.

Przykładowe rozwiązanie
Z treści zadania wynika, że połowa jednego ze składników jest równa
$600\frac{3}{4} - 488,5 = 112,25$
Obliczamy pierwszy składnik sumy: $112,25 \cdot 2 = 224,5$
Obliczamy drugi składnik sumy: $600\frac{3}{4} - 224,5 = 376,25$
Odp. Te liczby to 224,5 i 376,25

Sposób oceniania
1 pkt. – Za ustalenie sposobu obliczenia wartości połowy jednego ze składników,
np.: $600\frac{3}{4} - 488,5$.

1 pkt. – Za obliczenie wartości połowy jednego ze składników $600\frac{3}{4} - 488,5 = 112,25$

1 pkt. – Za obliczenie wartości jednego składnika sumy: $112,25 \cdot 2 = 224,5$.

1 pkt. – Za obliczenie wartości drugiego składnika: $600\frac{3}{4} - 224,5 = 376,25$.

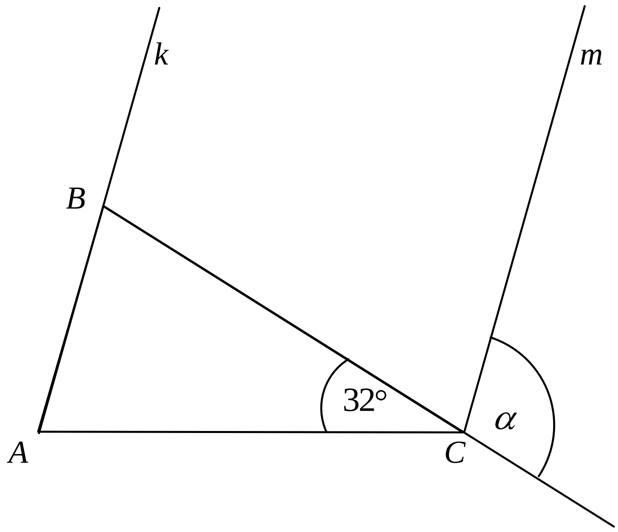
Zadanie 2. (0 – 4 pkt)
Po lekcjach, o godzinie 13^{30}, chłopcy umówili się na spotkanie. Ustalili godzinę spotkania w następujący sposób: czas, który upłynął od południa do godziny 13^{30} jest równy $\frac{1}{5}$ czasu, który pozostał do wyznaczonego momentu spotkania. Oblicz, o której godzinie chłopcy się umówili.

<u>Przykładowe rozwiązanie</u>
Obliczamy czas, który upłynął od południa (12^{00}) do chwili rozmowy chłopców
$13^{30} - 12^{00} = 1,5\,\text{godziny}$
Obliczamy czas, który pozostał do momentu spotkania
$5 \cdot 1,5\,\text{godziny} = 7,5\,\text{godziny}$
Obliczamy godzinę spotkania
$13^{30} + 7,5\,\text{godziny} = 21^{00}$
Odp. Chłopcy spotkają się o 21^{00}.

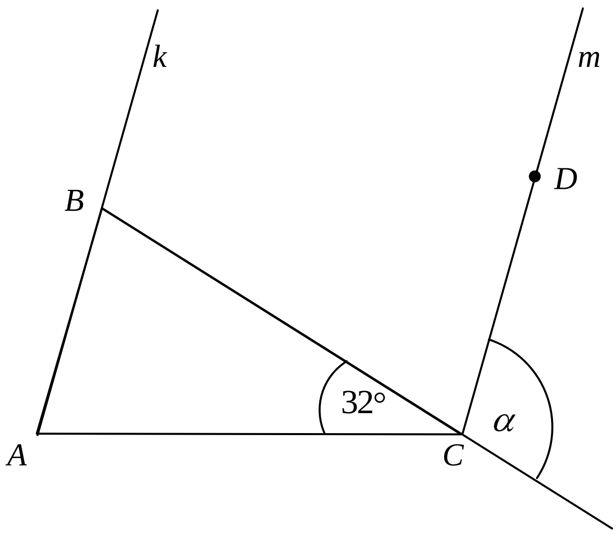
<u>Sposób oceniania</u>
1 pkt. – Za obliczenie czasu, który upłynął od południa do chwili rozmowy: $1,5\,\text{godziny}$.
<u>Uwaga</u>: uczeń może zapisać czas w innych jednostkach.
1 pkt. – Za ustalenie sposobu obliczenia czasu od rozmowy do momentu spotkania, np.: zapisanie działania $5 \cdot 1,5\,\text{godziny} =$
1 pkt. – Za obliczenie czasu od rozmowy do momentu wyznaczonego spotkania: 7,5 godziny.
1 pkt. – Za ustalenie, o której godzinie chłopcy się spotkają: $13^{30} + 7,5\,\text{godziny} = 21^{00}$.

Zadanie 3. (0 – 4 pkt)

Na poniższym rysunku półproste k i m są równoległe. Odcinki AC i BC są równej długości, a kąt ACB ma miarę $32°$. Oblicz miarę kąta α.



<u>Przykładowe rozwiązania</u>



ΔABC jest równoramienny, więc $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 180° - 32° \ : 2 = 74°$.

Proste k i m są równoległe, zatem kąty ABC oraz BCD są kątami naprzemianległymi, więc $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD| = 74°$.

Korzystamy z własności kątów przyległych i otrzymujemy:

$\alpha = 180° - |\sphericalangle BCD| = 180° - 74° = 106°$.

Uwaga: Do rozwiązania zadania możemy użyć twierdzenia o kącie zewnętrznym trójkąta.

<u>**Sposób oceniania**</u>

1 pkt. – Za ustalenie, że trójkąt ABC jest równoramienny

<u>uwaga</u>: uczeń nie musi tego zapisać w rozwiązaniu, jeśli z dalszych jego obliczeń wynik, że korzystał z własności trójkąta równoramiennego.

1 pkt. – Za obliczenie miar kątów trójkąta ABC: $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ABC| = 74°$.

1 pkt. – Za obliczenie miary kąta *BCD*: $\left|\sphericalangle BCD\right| = 74^\circ$.

<u>uwaga:</u> Uczeń może wyznaczyć inny kąt niż *BCD* za pomocą, którego wyznaczy miarę kąta α.

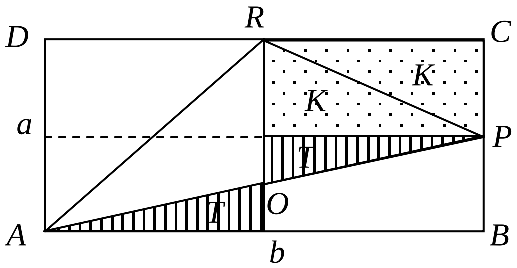
1 pkt. – Za obliczenie miary kata α: $\alpha = 106^\circ$.

Zadanie 4. (0 – 4 pkt)

W prostokącie *ABCD* punkt *P* jest środkiem boku *BC*, zaś punkt *R* jest środkiem boku *CD*. Trójkąt *APR* ma pole równe 30 cm^2. Oblicz pole prostokąta *ABCD*.

<u>Przykładowe rozwiązania</u>

<u>I sposób rozwiązania</u>



Podzielimy prostokąt *ABCD* na części, które są prostokątami albo trójkątami prostokątnymi (jak na rysunku).

Pole trójkąta *APR* zapisujemy w następujący sposób:

jest to suma pól trójkątów $K = \frac{1}{8}ab$, $T = \frac{1}{2}K = \frac{1}{16}ab$ oraz pola trójkąta *AOR*, którego pole jest równe: $P_{AOR} = \frac{1}{4}ab - T = \frac{1}{4}ab - \frac{1}{16}ab = \frac{3}{16}ab$.

Zapisujemy sumę: $P_{APR} = \frac{1}{8}ab + \frac{1}{16}ab + \frac{3}{16}ab = 30$ i obliczamy pole prostokąta *ABCD*: $\frac{6}{16}ab = 30$ czyli $ab = 80$.

<u>uwaga</u>:

zamiast zapisywać pole prostokąta *ABCD* w zależności od długości boków możemy użyć innego oznaczenia, np. *P*, wtedy otrzymujemy: $K = \frac{1}{8}P$, $T = \frac{1}{16}P$, $P_{AOR} = \frac{3}{16}P$ i dalej $\frac{1}{8}P + \frac{1}{16}P + \frac{3}{16}P = 30$ więc $P = 80$.

<u>Sposób oceniania I sposobu rozwiązania</u>

1 pkt. – Za zapisanie pola jednego z trójkątów: *K*, *T*, *AOR* w zależności od pola prostokąta, np.: $K = \frac{1}{8}ab$ lub $T = \frac{1}{2}K = \frac{1}{16}ab$ lub $P_{AOR} = \frac{3}{16}ab$.

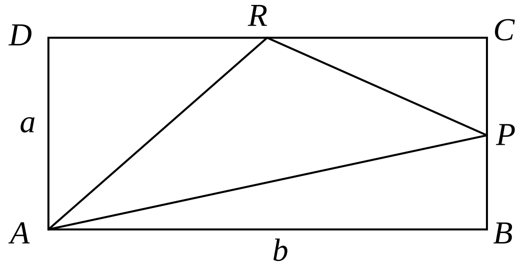
1 pkt. – Za zapisanie pola wszystkich trzech trójkątów: *K*, *T*, *AOR* w zależności od pola prostokąta *ABCD*.

1 pkt. – Za zapisanie zależności między polem prostokąta *ABCD* i polem trójkąta *APR*, np.:

$$\frac{1}{8}ab+\frac{1}{16}ab+\frac{3}{16}ab=30.$$

1 pkt. – Za obliczenie pola prostokąta *ABCD*: $P_{ABCD}=80$.

<u>II sposób rozwiązania</u>



Obliczymy pole prostokąta jako sumę pól czterech trójkątów, na które został podzielony.

Oznaczmy: $|AD|=a$ oraz $|AB|=b$, stąd $|BP|=|PC|=\frac{a}{2}$, $|CR|=|RD|=\frac{b}{2}$.

Trójkąt *ABP* jest prostokątny i jego pole jest równe $\frac{1}{2}b\cdot\frac{a}{2}=\frac{ab}{4}$.

Pola kolejnych trójkątów prostokątnych *PCR*, *RDA* są równe: $P_{\Delta PCR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{ab}{8}$ oraz $P_{\Delta RDA}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{b}{2}=\frac{ab}{4}$.

Pole trójkąta *APR* jest różnicą pola prostokąta *ABCD* i sumy pól trzech trójkątów prostokątnych *ABP*, *PCR* oraz *RDA*, zatem otrzymujemy: $ab-\left(2\cdot\frac{ab}{4}+\frac{ab}{8}\right)=30$.

Obliczamy pole prostokąta *ABCD*: $ab-\frac{5}{8}ab=30$, $\frac{3}{8}ab=30$ stąd $ab=80$.

<u>Sposób oceniania II sposobu rozwiązania</u>

1 pkt. – Za zapisanie pola jednego z trójkątów prostokątnych w zależności od pola prostokąta, np.: $P_{\Delta ABP}=\frac{1}{2}b\cdot\frac{a}{2}=\frac{ab}{4}$ lub $P_{\Delta RDA}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{b}{2}=\frac{ab}{4}$ lub $P_{\Delta PCR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{ab}{8}$.

1 pkt. – Za zapisanie pola wszystkich trzech trójkątów prostokątnych w zależności pola prostokąta *ABCD*.

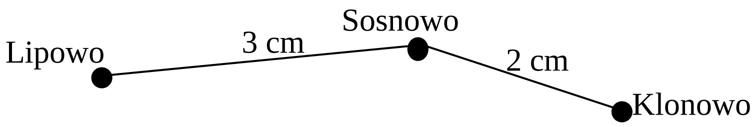
1 pkt. – Za zapisanie zależności miedzy polem prostokąta *ABCD* i polem trójkąta *APR*, np.:

$$ab-\left(2\cdot\frac{ab}{4}+\frac{ab}{8}\right)=30 \text{ lub } ab=30+\left(2\cdot\frac{ab}{4}+\frac{ab}{8}\right)$$

1 pkt. – Za obliczenie pola prostokąta *ABCD*: $P_{ABCD}=80$.

Zadanie 5. (0 – 4 pkt)

Miasta Lipowo i Sosnowo są oddalone od siebie o 60 km. Na rysunku podano odległości między miastami Lipowo, Sosnowo i Klonowo na pewnej mapie. Oblicz, jaką odległość pokona kierowca jadący z Lipowa przez Sosnowo do Klonowa.



Przykładowe rozwiązania

I sposób rozwiązania

Obliczamy skalę w jakiej wykonana jest mapa: $\frac{3\text{cm}}{60\text{km}} = \frac{3}{6000000} = \frac{1}{2000000}$

Obliczamy rzeczywistą odległość między Sosnowem i Klonowem:

$2\text{cm} \cdot 2000000 = 4000000\text{cm} = 40\text{km}$

Obliczamy odległość między Lipowem i Klonowem: $60\text{km} + 40\text{km} = 100\text{km}$.

Sposób oceniania I sposobu rozwiązania

1 pkt. – Za zapisanie sposobu obliczenia skali w jakiej wykonana jest mapa: $\frac{3\text{cm}}{60\text{km}}$

1 pkt. – Za obliczenie skali w jakiej wykonana jest mapa: $\frac{1}{2000000}$.

1 pkt. – Za obliczenie odległości między Sosnowem i Klonowem: 40km.

1 pkt. – Za obliczenie odległości między Lipowem i Klonowem: 100km.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy odległość między Sosnowem i Klonowem literą a i zapisujemy proporcję:

$\frac{60\text{km}}{a} = \frac{3}{2}$ i obliczamy odległość a między Sosnowem i Klonowem: $a = 40\text{km}$.

Obliczamy odległość między Lipowem i Klonowem: $60\text{km} + 40\text{km} = 100\text{km}$.

Sposób oceniania II sposobu rozwiązania

2 pkt. – Za zapisanie proporcji między odcinkami przedstawionymi na mapie i odległościami w rzeczywistości: $\frac{60\text{km}}{a} = \frac{3}{2}$.

1 pkt. – Za obliczenie odległości między Sosnowem i Klonowem: 40km.

1 pkt. – Za obliczenie odległości między Lipowem i Klonowem: 100km.

Maksymalna liczba punktów	20
85% maksymalnej liczby punktów	17